数理解析研究所講究録
第 798 巻 1992 年 119-128

区間方程式の解について

北海道大学経済学部　田中 嘉浩 (Yoshihiro Tanaka)

1 序

数値計算の精度保証の問題と絡んで区間方程式 (interval equations) の手法が近年注目されている。その基本形である線形区間方程式は

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad (\tilde{A} \in A,\ \tilde{b} \in b), \tag{1.1}$$

の形の方程式であり，通常の連立一次方程式をその特別な場合として含む重要なクラスの問題である．

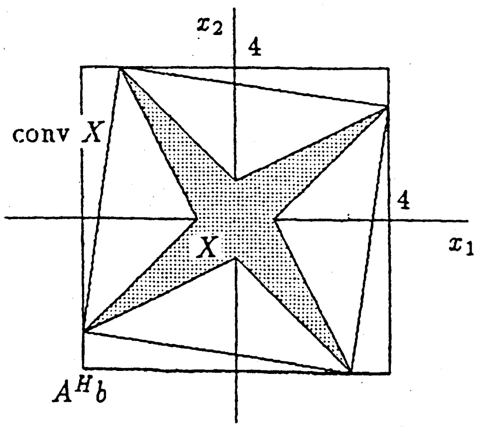
この問題に対する研究の多くは，"効率的に", "良い" (1.1) の hull を評価することを目標としてきた．

本稿では最近明らかになってきた良い hull を求めれるための条件と、その検証について述べ、実際の数値解法での評価との関連も示す。

記法は主に Neumaier [4] のものを用いる．$\mathbf{IR}, \mathbf{IR}^n, \mathbf{IR}^{n\times n}$ で，実閉区間，n 次元区間ベクトル，$n \times n$ 区間行列の集合を表す．(以下では一々区間行列とはいわない．) $x = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbf{IR}^n$ に対し，中点，半径，絶対値をそれぞれ，$x_c := (\overline{x} + \underline{x})/2$, $\rho(x) := (\overline{x} - \underline{x})/2$, $|x| := \sup\{\overline{x}, -\underline{x}\} = \sup\{|\tilde{x}| \mid \tilde{x} \in x\}$ と記す．$|A| := \sup\{|\tilde{A}| \mid \tilde{A} \in A\}$ とする．**Ostrowski** 演算子 $\langle\cdot\rangle$ とは，正方行列 $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ に対して，$A' = \langle A \rangle$，但し，$A'_{ii} := \min\{|\tilde{a}| \mid \tilde{a} \in A_{ii}\}, A'_{ij} := -|A_{ij}|$ for $i \neq j$, を対応させるものである．有界部分集合 $\Sigma \subseteq \mathbf{R}^n$ の **hull** を Σ を含む最小の有界部分集合 $\Box\Sigma := [\inf \Sigma, \sup \Sigma]$ (各成分毎，即ち矩形) で定義する．2 つの区間ベクトル $x, y \in \mathbf{IR}^n$ の距離 (ベクトル) を，

$$q(x, y) := \inf\{q \in \mathbf{R}^n \mid q \geq 0, x \subseteq y + [-q, q], y \subseteq x + [-q, q]\},$$

で定義する．この定義は距離の公理を満たし，$x \subseteq y$ iff $|x_c - y_c| \leq \rho(y) - \rho(x)$, が成立する．



例 1

$$A = \begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix}$$

$$\text{and} \quad b = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}.$$

$A, B \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ に対し，

$$A \pm B := \square\{\tilde{A} \pm \tilde{B} \mid \tilde{A} \in A,\ \tilde{B} \in B\},$$

$$A^{-1} := \square\{\tilde{A}^{-1} \mid \tilde{A} \in A\},$$

等と定義する．

行列のノルムを $\|A\| := \|\sup_{\|x\|=1} |Ax|\|$; 正ベクトル $u \in \mathbf{R}^n$ を固定してスケール化最大ノルムを $\|x\|_u := \max_i(|x_i|/u_i), \|A\|_u := \max_i(\sum_k |A_{ik}|u_k)/u_i$, とする．

写像 $S : \mathbf{IR}^n \to \mathbf{IR}^n$ が，(i) 包含同調性 $x \subseteq y \Rightarrow Sx \subseteq Sy$, (ii) 斉次性 $\alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow S(x\alpha) = (Sx)\alpha$, (iii) 劣加法性 $S(x \pm y) \subseteq Sx \pm Sy$ を満たす時，S を劣線形 (**sublinear**) という．S のカーネルを $\kappa(S)\,(\in \mathbf{IR}^{n\times n})$ と記す．劣線形写像が更に (iv) 劣乗法性 $\rho(Sx) \geq |S|\rho(x)$ を満たす時，正規 (**normal**) という．写像 $A^M : x \to Ax$ は劣線形(実は正規) である．

2 解の形状と hull

Oettli and Prager [7] らにより，(1.1) の解集合は驚くべきことに，

$$X = \{x \mid |A_c x - b_c| \leq \Delta|x| + \delta\} \tag{2.1}$$

但し $|x|_i = |x_i|$, $\Delta = \rho(A)$, $\delta = \rho(b)$ ，によって表され，X と各象限の共通部分は凸多面体になる [6] ことが分っている．

正則な $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ に対して， hull を与える写像 A^H を，

$$A^H : b \to \square\{\tilde{A}^{-1}\tilde{b} \mid \tilde{A} \in A,\ \tilde{b} \in b\},$$

で定義すると，A^H は劣線形になる．$A^H b \subseteq A^{-1}b$ に注意する．いかに良い (tight な) A^H の評価を得れるかが一つの目標になる。

ここで、2^n 個のベクトルの集合を $Y = \{y \in \mathbf{R}^n \mid |y_j| = 1, j = 1, ..., n\}$ で定義する．

定理 2.1[10]. $A \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ を正則とする．その時，各 $y \in Y$ に対して $T_y = \mathrm{diag}\ (y)$ とした方程式

$$A_c x - b_c = T_y(\Delta|x| + \delta), \tag{2.2}$$

は、唯一の解 $x_y \in X$ をもち，

$$\mathrm{conv}\ X = \mathrm{conv}\ \{x_y | y \in Y\},$$

を満たす. ∎

各 x_y は $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ を (2.2) に代入し、$A_c - T_y\Delta = A_{ye}$, $A_c + T_y\Delta = A_{yf}$, $b_y = b_c + T_y\delta$ として、

$$x^+ = A_{ye}^{-1} A_{yf} x^- + A_{ye}^{-1} b_y, \tag{2.3}$$

という線形相補性問題を考えることにより、理論的に存在と一意性がいえる。この事実と 定理 2.1 から一般に 2^n個の問題を解くことにより $A^H b$ を得れることが分かる。但し、実際に (2.3) を Lemke 法等で解くのは A_{ye}^{-1} の計算の手間がかかるので、x_y を求める別の手法が提案されている。

また Rohn は次の定理も証明した。

定理 2.2[9]. $A \in \mathbf{IR}^{n \times n}$ を正則とする. その時, (1.1) の解集合 X が非凸である為の必要十分条件は，$y_i = z_i, (x_y)_j(x_z)_j < 0, \Delta_{ij} > 0$ となる $y, z \in Y, i, j \in \{1, ..., n\}$ が存在することである. ∎

A が thick ($\Delta > 0$) の時には，$(x_y)_j(x_z)_j < 0$ となる $y, z \in Y, y \neq -z$, $j \in \{1, ..., n\}$ が存在することでよい．

これらの結果は非常に一般的であるが、その条件を検証する為の計算量を考えると概念的なものであることは否めない。[10] では、A に更なる仮定を設け、$\underline{x}$ 及び $\overline{x}$ の実行可能な導出法が与えられている。

定理 2.3([10, Theorem 4.7] の系). $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$ を満たすとする．その時 $A^H b$ は (2.2) に於いて $y = e = (1, ..., 1)^T$ に対し、2 つの問題の解 x_y, x_{-y} により得られる。 ∎

解集合 X の凸性はこの枠組ではどの様に与えられるだろうか？

事実 1. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$ を満たすとする．その時、次の条件の 1 つが満たされれば、解集合 X は凸である。

(a) $b \in \mathbf{IR}^n$ が $b \geq 0$ または $b \leq 0$ を満たす。

(b) b が thin ($\delta = 0$) である。

[証明] (a): X がある単一象限の部分になることから明らか。

(b): $x^1, x^2 \in X$ に対し, $\tilde{A}^1 x^1 = \tilde{A}^2 x^2 = b$ を満たす $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2 \in A$ が存在する。その時、任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} x^c &= (1-\lambda)x^1 + \lambda x^2 \\ &= (1-\lambda)x^1 + \lambda(\tilde{A}^2)^{-1}\tilde{A}^1 x^1 = (I - \lambda(I - (\tilde{A}^2)^{-1}\tilde{A}^1))x^1, \end{aligned}$$

であるから、$\tilde{A}^c x^c = b$ を満たす $\tilde{A}^c$ は $\tilde{A}^c = \tilde{A}^1(I - \lambda(I - (\tilde{A}^2)^{-1}\tilde{A}^1))^{-1}$ で与えられる。

$z = \mathrm{sgn}(b)$ として問題

$$\tilde{A}u = T_z\tilde{A}x = T_z b. \tag{2.4}$$

を考えた時、(2.4) の解集合は (a) より凸であるから、$u^c = (1-\lambda)u^1 + \lambda u^2$ ($u^i = (\tilde{A}^i)^{-1}T_z\tilde{A}^i x^i$, $i = 1, 2$) に対し、$Bu^c = Db$ を満たす行列 $B \in A$ が存在する。 実際、$B = \tilde{A}^1(I - \lambda(I - (\tilde{A}^2)^{-1}\tilde{A}^1))^{-1} = \tilde{A}^c$ である。 ∎

事実 2. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$, $\Delta > 0$ を満たし、$0 \in \mathrm{int}\, b$ ならば、その解集合は非凸である。 ∎

[証明] 定理 2.3 により $y = e = (1, ..., 1)^T$ に対し $\overline{x} = x_y, \underline{x} = x_{-y}$ である。任意の $\tilde{A} \in A$ に対し、$\overline{x} \geq \tilde{A}^{-1}e > 0$, $\underline{x} \leq \tilde{A}^{-1}e < 0$ である。よって非凸である為には 定理 2.2 から $z = e, -e$ に対して $x_z \neq 0$ をいえばいい。$x_z = 0$ ならば (2.3) より $A_{ye}^{-1}b_y = 0$ となるが、A_{ye} の正則性によりこれは矛盾。 ∎

ここで話を簡単にする為に次の非退化の仮定をおく。

仮定 **(N).** 任意の $y \in Y$ に対して (2.3) の解は $x_i^+ > 0$ または $x_i^- > 0$ を満たす。

補題 2.4. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$, $\Delta > 0$ を満たすとする. 更に仮定 (N) が成立するとする。この時解集合 X が凸である為の必要十分条件は、任意の $x^1, x^2 \in X$ に対し、$x_i^1 x_i^2 \geq 0$, $i = 1, ..., n$ であることである。

[証明]　十分性：　明らか。
必要性: ある $x^1, x^2 \in X$ に対し、$x_j^1 x_j^2 < 0$ であったとすると、$\overline{x}_j \geq \max\{x_j^1, x_j^2\}$, $\underline{x}_j \leq \min\{x_j^1, x_j^2\}$ であるから、$\overline{x}_j \underline{x}_j < 0$ 。ところで　$A^{-1} \geq 0$ より、$y = e$ に対して $\overline{x} = x_y$, $\underline{x} = x_{-y}$ となる。$n \geq 2$ だから仮定 (H) の下では、$z \neq y, -y$ について $(x_z)_j (x_y)_j < 0$ または $(x_z)_j (x_{-y})_j < 0$ 。よって定理 2.2 より非凸。即ち題意は成立する。 ∎

定理 2.5. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$, $\Delta > 0$ を満たし、更に仮定 (N) が成立する時、解集合 X が凸である為の必要十分条件は $y = e$ に対し、$(x_y)_i (x_{-y})_i \geq 0, i = 1, ..., n$ であることである。

[略証]　補題 2.4 と定理 2.3 による。 ∎

線形相補性問題の解を用いない条件は例えば次の様になる。

定理 2.6. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ が正則かつ $A^{-1} \geq 0$, $\Delta > 0$ を満たし、更に仮定 (N) が成立するとする。ある $x \in X, (x_i \neq 0,\ i = 1, ..., n)$ が分かっている時、解集合 X が凸である為の必要十分条件は $z = \mathrm{sgn}(x)$ に対し、第 i 行が $(\overline{AT_z}x)_i = \underline{b}_i$ or $(\underline{AT_z}x)_i = \overline{b}_i$ である任意の連立一次方程式が $x \geq 0$ なる解をもつことである。

[略証]　補題 2.4 と [8, Theorem 1] を用いる。 ∎

3 Hull の outer estimation

3.1 Gauss 消去法

下(上)三角行列 $L\,(U)$ に対して，前進消去(後退代入)を与える写像を $L^F\,(U^F)$ で定義する．

$A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が三角分解 (L_A, U_A) (L_A の対角成分は 1 に選ぶ) をもつならば，L_A, U_A は正則であり，写像 $A^G := U_A^F L_A^F$, $A^G b = U_A^F L_A^F b$ for $b \in \mathbf{IR}^n$ で定義される A^G を A の **Gauss 逆行列** という．

定理 3.1[4]. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ に対して A^G が存在するとする．その時，A^G は正規劣線形写像であり，A は正則で，

$$A^H \subseteq A^G \tag{3.1}$$

を満たす．更に，A が thin (i.e., $\Delta = 0$) ならば，A^G は線形で，

$$\kappa(A^G) = A^{-1},$$

である． ∎

注. 通常の行列においても，正則ならばGauss 逆行列をもつとは限らない．しかし実は，A が H 行列(3.2 節参照) ならば，A^G が存在して，$|A^G| = \langle U_A\rangle^{-1}\langle L_A\rangle^{-1} \leq \langle A\rangle^{-1}$ を満たす．

$A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が $A_{ij} \leq 0\,(i \neq j)$ であり，ある正ベクトル $u \in \mathbf{R}^n$ に対して $Au > 0$ ならば，M 行列という．$A, B \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が M 行列ならば，(i) A は正則，$A^{-1} \geq 0$ かつ $\langle A\rangle = A$, (ii) $x > 0 \Rightarrow A^{-1}x > 0$, (iii) $A - B$ が M 行列である必要十分条件は $\sigma(A^{-1}B) < 1$, 等の性質がある．M 行列は軸選択をしない Gauss 消去法に課せられる標準的条件の一つである。

定理 3.2. $A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ が M 行列の時，$A^H b = A^G b$ を満たす為の必要十分条件は $b \leq 0$, $0 \leq b$, 又は $0 \in b$ であることである。

[証明] 略 ∎

3.2 不動点法

$A \in \mathbf{IR}^{n\times n}$ がある正ベクトル $u \in \mathbf{R}^n$ に対して $\langle A\rangle u > 0$，即ち，$\langle A\rangle$ が実 M 行列ならば，A を H 行列という．M 行列，対角優位行列，正則な三角行列は H 行列である．

行列 A の分割 $A = L - E$ において，L が下三角ならば 三角分割, $A = L \ominus E$, かつ E の対角要素が 0 ならば 直分割, $\langle L\rangle - |E|$ が M 行列ならば 強分割 という．代表的なものに，**Richardson** 分割 $A = I - E\ (E := I - A)$, **Jacobi** 分割 $A = D - E, (D_{ii} := A_{ii}, E_{ii} := 0; D_{ij} := 0, E_{ij} := -A_{ij}\ i \neq j)$，**Gauss-Seidel** 分割 $A = L - U, (L_{ij} = 0, U_{ij} = -A_{ij}, i < j;\ L_{ij} = A_{ij}, U_{ij} = 0, i \geq j)$ がある．この 3 つはどれも三角分割であり，更に Jacobi, Gauss-Seidel 分割は，直分割である．尚，A の直分割が強分割になることと，A が H 行列であることは同値である．

この節では，H 行列 A の強分割 $A = L - E$ による反復 $x^{l+1} = L^F(b + Ex^l)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ について知られている条件を述べる．

定理 3.3[4]．A を H 行列とする．その時，任意の三角直分割 $A = L \ominus E$ に対して上の点列は、$\|q(x^{l+1}, x)\| \leq \beta \|q(x^l, x)\|$, $\|\langle L\rangle^{-1}|E|\| = \beta < 1$ を満たしつつ x に収束する。この場合、任意の $b \in \mathbf{IR}^n$ に対して，唯一の写像 $A^F : \mathbf{IR}^n \to \mathbf{IR}^n$ が存在して，

$$A^F b = L^F(b + EA^F b),$$
$$A^H \subseteq A^F \tag{3.2}$$

を満たす．∎

[4] には Gauss-Seidel 分割が収束因子 $\|\langle L\rangle^{-1}|E|\|$ を最小化することが示されている。

A が正則かつ $A^{-1} \geq 0$ ならば $A^H b$ に収束する不動点法を構成しうる ([5] 参照) 。また、より一般の劣線形写像 $S, T : \mathbf{IR}^n \to \mathbf{IR}^n$, 但し $\sigma(|S||T|) < 1$, に対する

$$x^{l+1} := S(b + Tx^l)$$

の解析が [5] になされている．

3.3 例

次の例で上の方法を試してみる.

例 2

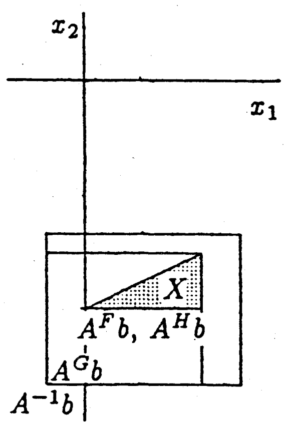
$$A = \begin{pmatrix} 1 & [-\frac{1}{2}, 0] \\ [-\frac{1}{2}, 0] & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gauss 消去法は,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-\frac{1}{2}, 0] & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & [-\frac{1}{2}, 0] \\ 0 & [\frac{3}{4}, 1] \end{pmatrix} \quad , \text{and} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ [-2, -\frac{3}{2}] \end{pmatrix},$$

から, $Ux = y$ を解いて,

$$x = U^F y = A^G b = \begin{pmatrix} [-\frac{1}{3}, 1] \\ [-\frac{8}{3}, -\frac{3}{2}] \end{pmatrix},$$



となる.
不動点法 (Gauss-Seidel 分割) は,

$$A = L - U,$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [-\frac{1}{2}, 0] & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

を用いて,

$$Lx^{l+1} = b + Ux^l, \quad l = 0, 1, ...,$$

を解いていけばいい. $x^0 = (1, -2)^T$ とすると,

$$x^1 = x^2 = \cdots = A^F b = \begin{pmatrix} [0, 1] \\ [-2, -\frac{3}{2}] \end{pmatrix},$$

を得る.
一方,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} [1, \frac{4}{3}] & [0, \frac{2}{3}] \\ [0, \frac{2}{3}] & [1, \frac{4}{3}] \end{pmatrix},$$

から,

$$A^H b = \begin{pmatrix} [0,1] \\ [-2,-\frac{3}{2}] \end{pmatrix}, \quad A^{-1} b = \begin{pmatrix} [-\frac{1}{3},\frac{4}{3}] \\ [-\frac{8}{3},-\frac{4}{3}] \end{pmatrix},$$

即ちこの場合は,

$$A^H b = A^F b \subset A^G b \subset A^{-1} b$$

となる.

4 課　題

一般に非対称行列の場合、成分の変動より固有値の変動の方がずっと大きいことがあり、注意を要する.

2 節の結果については x_y を簡単に (相補性問題を解かずに) 求めれる為の妥当な仮定について現在考慮中である。3 節の $A^H b$ を不動点法で求める為の仮定や方法との関連もありそうである。

大規模問題はブロック化により効率的に扱えることが多い. ブロック手法についての試みは [2] になされている.

参考文献

[1] W. Barth and E. Nuding, "Optimale lösung von intervallgleichungssystemen", *Computing* **12** (1974) 117–125.

[2] J. Garloff, "Block methods for the solution of linear interval equations", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **11** (1990) 89–106.

[3] D.M. Gay, "Solving interval linear equations", *SIAM J. Numer. Anal.* **19** (1982) 858–870.

[4] A. Neumaier, "New techniques for the analysis of linear interval equations", *Linear Algebra Appl.* **58** (1984) 273–325.

[5] A. Neumaier, "Further results on linear interval equations", *Linear Algebra Appl.* **87** (1987) 155–179.

[6] W. Oettli, "On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients", *SIAM J. Numer. Anal.* **2** (1965) 115–118.

[7] W. Oettli and W. Prager, "Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides", *Numerische Mathematik* **6** (1964) 405–409.

[8] J. Rohn, "Strong solvability of interval linear programming problems", *Computing* **26** (1981) 79–82.

[9] J. Rohn, "On nonconvexity of the solution set of a system of linear interval equations", *BIT* **30** (1989) 161–165.

[10] J. Rohn, "Systems on linear interval equations", *Linear Algebra Appl.* **126** (1989) 39–78.